תורת הקבוצות, תרגיל 5

לתשומת לב: כדי לענות על שאלות 2 ו-4 תצטרך לדעת את משפטים 56 ו-57 שבפרק ג', על הוכחותיהם.

1. הוכח בדרך ישירה (ע"י בניית פונקציה חח"ע ועל) כי הקבוצות A ו-B הבאות שוות עוצמה:
   א. $A = [1,2] \cup [3,4]$, $B = [0,4]$
   ב. $A = [1,2)$, $B = (1,2)$
   ג. $A = (-\infty, 0]$, $B = (-1,1)$.

2. עבור הקבוצות הבאות קבע האם הן בנות מניה או שוות עוצמה לקבוצת כל הממשיים $\Re$. הוכח את קביעתך.
   א. קבוצת תתי הקבוצות של N המכילות את כל המספרים הזוגיים.
   ב. קבוצת הסכומים הסופיים של איברים בקבוצה S כאשר S קבוצה בת מניה מסויימת של מספרים ממשיים.
   ג. קבוצת כל הפונקציות שתחומן הוא קבוצה סופית של מספרים טבעיים וכל ערכיהן הם מספרים טבעיים.
   ד. קבוצת כל הפונקציות $\{f | f : Q \to \{0,1,2\}\}$.
   ה. קבוצת כל הפונקציות $\{f | f : \{0,1,2\} \to Q\}$.

3. א. השתמש במשפט קנטור כדי להוכיח שמחלקת כל הקבוצות בנות איבר אחד בדיוק אינה קבוצה.
   ב. הוכח את אותה הטענה בדרך אחרת.

4. הוכח, כי קיימת משפחה W של תתי קבוצות של N כך, שלכל $A, B \in W$ מתקיים $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$, ובנוסף, W שוות עוצמה ל $\Re$.

5. א. תהי S קבוצת כל הישרים במישור העוברים לפחות בנקודה אחת ששני שיעוריה רציונליים. האם S בת מניה, שוות עוצמה ל- $\Re$ או "גדולה" יותר?
   ב. אותה שאלה לגבי קבוצת הישרים העוברים לפחות בשתי נקודות ששני שיעוריהן רציונליים.

תאריך ההגשה: 24.11.2004